بسم الله الرحمن الرحیم

علـوی

ریاضیات گسسته

بهرام غلامی – مفید ابراهیم‌پور

مجموعه کتاب‌های همراه علـوی

سخن ناشر

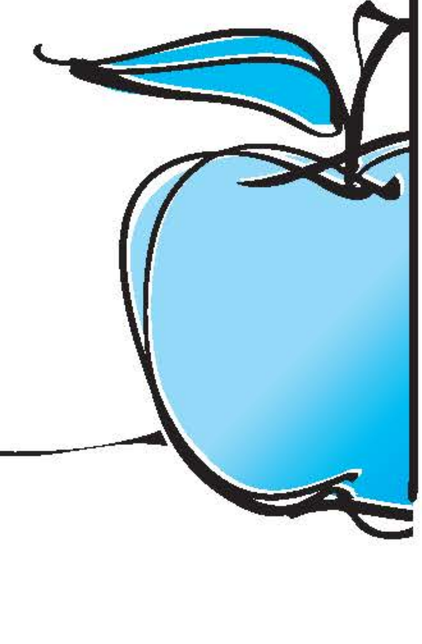
سـرآغاز هـر نامـه نـام خداسـت   که بی نام او نامه یکسـر خطاسـت

سپاس خدای را سزاست که اندیشهٔ انسانی را از طریق الهام با علم الهی پیوند زد و غبار تفکر بشری را با ظهور وحی ناب شست‌وشو داد و راهی رسا و نمایان در مقابل انسان گشود.

مؤسسهٔ علوی طی سالیان متمادی، با ارائه خدمات فرهنگی و آموزشی، مفتخر است که توانسته تا حد توان در راه اعتلای کیفی فرهنگ و آموزش گام بردارد و با توجه به این رسـالت خطیر و جامعیت بخشـیدن به برنامه‌های آموزشی خویش اقدام به تهیه مجموعهٔ حاضر نماید.

کتاب پیش رو برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم منطبق با آخرین نسـخهٔ کتاب درسـی تألیف شـده است، همچنین این کتاب برای آمادگی و تسلط کامل بر دروس پایه دهم و یازدهم می‌تواند بسیار آموزنده و مفید باشد.

مؤلف کتاب در مقدمه به شیوایی رئوس مطالب را شرح داده است، پس سخن را کوتاه و شما را به مطالعه کتاب دعوت می‌نماییم. امیدواریم آموزش این کتاب، به رشد و شکوفایی علم و دانش و پرورش شایستگی‌ها در نسل جوان یاری رساند. در خاتمه از همهٔ دست‌اندرکاران محترم که در مسیر پر فراز و نشیب تدوین و نشر کتاب زحمات فراوانی کشیده‌اند سپاسگزاری می‌نماییم و از تمامی شما عزیزان خواهشمندیم جهت بهبود و ارتقای سطح کیفیت کتاب پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت alavi.ir و شماره های تماس ذکر شده در صفحه شناسنامه با ما در میان بگذارید.



مقدمه مؤلف

خـدا را سـپاس می‌گوییم که در کنار نعمت‌های بی‌پایان خود این نعمت را نصیب ما کرده تا قدمی هر چند کوچک در جهت موفقیت شما دانش‌آموزان عزیز برداریم.

بسـیار مفتخریم که کتاب «ریاضیات گسســته» را در اختیار شـما قرار می‌دهیم. این کتاب به مباحث: نظریه اعداد، گراف و ترکیبیات دوازدهم پرداخته و در ســه فصل، به رشــته تحریر درآمده اســت که در هر فصل بعد از آموزش (درسنامه) به روش‌های تست‌زنی پرداخته می‌شود.

کتابی که هم‌اکنون در اختیار شما قرار گرفته است، دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

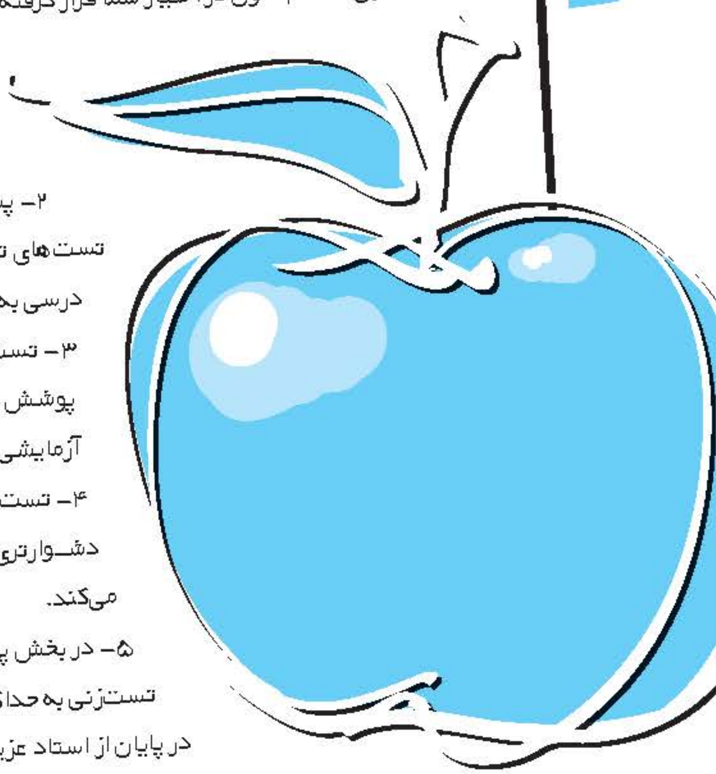
۱- درسنامه کامل و جامع با توجه به آخرین تغییرات کتاب درسی طوری تنظیم شده است که سعی کرده‌ایم تمام نکات موردنیاز شما را در این کتاب بگنجانیم.

۲- پس از پایان درســنامه بانک ســؤالات کاملی تنظیم شــده اســت که شامل تست‌های تألیفی و تست‌های کنکور سال‌های اخیر بوده که با توجه به تغییرات کتاب درسی به روزرسانی شده‌اند.

۳- تست‌های تألیفی را به گونه‌ای طراحی نموده‌ایم که تمام مطالب کتاب درسی را پوشش دهد به‌طوریکه پس از تسلّط بر این کتاب، به‌راحتی می‌توانید در هر کنکور آزمایشی شرکت کرده و موفق شوید.

۴- تست‌ها در سه سطح ۱، ۲ و ۳ طراحی شده‌اند، که در سطح ۳، تست‌های نسبتاً دشــوارتری نسبت به ســطح ۱ و ۲ خواهید دید و شما را برای آزمون‌های سخت آماده می‌کند.

۵- در بخش پاسخنامه، نکات کلیدی و آموزنده‌ای ارائه شده است که مهارت شما را در تست‌زنی به حداکثر می‌رساند.



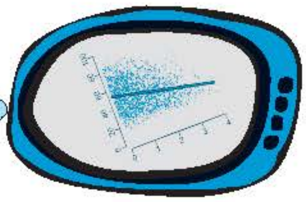
در پایان از استاد عزیز جناب آقای مهندس سیروس نصیری به‌خاطر رهنمودهای ارزنده‌شان، آقای بهزاد رنجبران و دیگر همکاران انتشــارات ۲۰ و همچنین انتشـارات علوی فرهیخته صمیمانه سپاسگزاریم.

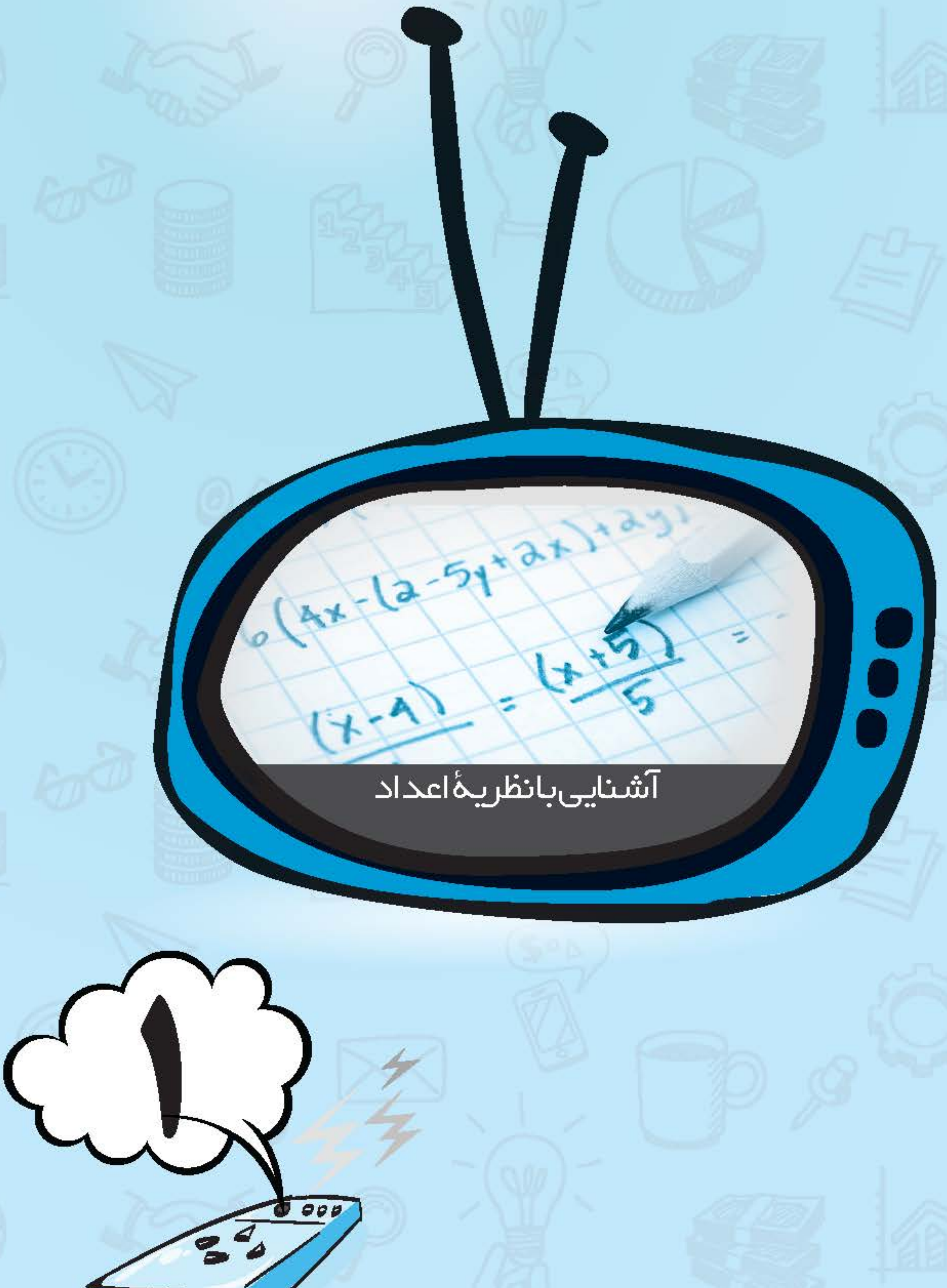
بهرام غلامی - مفید ابراهیم‌پور

تقدیم به:

- همهٔ آن‌ها که تا امروز در مسیر آموزش تلاش کرده‌اند.
- و شما که قرار است در آیندهٔ نزدیک، نقش علمی مهمی ایفا کنید.

فهرست




آشنایی با نظریهٔ اعداد
۱

درس ۱ استدلال ریاضی

در این درس برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات را بررسی می‌کنیم. استدلال‌هایی که در این درس با آنها آشنا خواهیم شد (البته در درس هندسه (۱) نیز با برخی از آنها آشنا شده‌اید) به صورت زیر می‌باشند:

۱- **اثبات مستقیم:** برای اثبات گزاره‌ای با استفاده از روش مستقیم، ابتدا به جمع‌آوری گزاره‌های درستی که ممکن است با مسئله مورد بحث در ارتباط باشند می‌پردازیم. این گزاره‌ها می‌توانند گزاره‌های قبلاً محقق شده (اثبات شده) باشند، سپس با استفاده از قوانین جبر و سایر اعمال درست، مرحله به مرحله گزاره نهایی را اثبات می‌کنیم.

به‌طور مثال برای اثبات گزاره «مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است» به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)=۳k$$

نکته اثبات مستقیم را قاعده استلزام نیز می‌گویند.

نکته استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی نوعی از روش‌های اثبات مستقیم می‌باشند.

۲- **مثال نقض:** بعضی اوقات عدم درستی ارزش یک گزاره را می‌توان با یک مثال نشان داد که این روش استدلال یکی از شیوه‌های مرسوم و قوی در ریاضی می‌باشد. در واقع به مثالی که نشان دهد درستی یک حکم، غلط است مثال نقض می‌گویند.

به‌طور مثال برای اثبات نادرستی گزاره «برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$» می‌توان مثال نقض زیر را ارائه داد:

$$\begin{cases} x=۹ \\ y=۱۶ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۹+۱۶}\neq\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}\Rightarrow ۵\neq ۷$$

۳- **اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):**

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش کاربرد محدودی دارد و منحصر به مسائلی است که تعداد راه‌های ممکن برای اثبات آن‌ها متناهی است و امکان بررسی هریک از این راه‌ها وجود دارد.

به‌طور مثال برای اثبات گزاره «برای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است» باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

الف) اگر n زوج باشد، که در این حالت داریم:

$$n=۲k \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱$$
$$=۲(۲k^۲-۵k+۳)+۱=۲k'+۱$$

ب) اگر n فرد باشد، که در این حالت داریم:

$$n=۲k-۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} n^۲-۵n+۷=(۲k-۱)^۲-۵(۲k-۱)+۷=$$
$$۴k^۲-۴k+۱-۱۰k+۵+۷=۴k^۲-۱۴k+۱۳=۴k^۲-۱۴k+۱۲+۱$$
$$=۲(۲k^۲-۷k+۶)+۱=۲k'+۱$$

در مثالی دیگر می‌خواهیم ثابت کنیم که معادله $x^۲+y^۲=۷$ دارای جواب صحیح نیست. برای اثبات، تمام حالت‌های ممکن را چون محدود است امتحان می‌کنیم.

$$۱)x=\pm۱\Rightarrow\begin{cases} y=\pm۱\Rightarrow x^۲+y^۲=۲ \\ y=\pm۲\Rightarrow x^۲+y^۲=۵ \\ y=\pm۳\Rightarrow x^۲+y^۲>۷ \end{cases}$$
به ازای $x=\pm۱$، هیچ y صحیحی وجود ندارد

$$۲)x=\pm۲\Rightarrow\begin{cases} y=\pm۱\Rightarrow x^۲+y^۲=۵ \\ y=\pm۲\Rightarrow x^۲+y^۲>۷ \end{cases}$$
به ازای $x=\pm۲$، هیچ y صحیحی وجود ندارد

$$۳)x=\pm۳\Rightarrow\left\{x^۲+y^۲>۷\right.$$
به ازای $x=\pm۳$، هیچ y صحیحی وجود ندارد

از ۳ حالت بالا نتیجه می‌شود که معادلهٔ $x^۲+y^۲=۷$ دارای جواب صحیح نمی‌باشد.

نکته با توجه به هم‌ارزی زیر شیوهٔ اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها توجیه می‌شود.

$$P_1 \vee P_2 \vee .... \vee P_n \Rightarrow r = (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge ...(P_n \Rightarrow r)$$

۴-اثبات غیرمستقیم (برهان خلف):

نوعی از اثبات است که در آن فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) به این نتیجه می‌رسیم که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

نکته برای اثبات به روش برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) سه مرحله زیر را بررسی می‌کنیم:

الف) فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد (فرض خلف = نقیض حکم)

ب) نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای می‌دهد که با یک عبارت همیشه درست یا فرض مسئله متضاد است.

پ) حال که به این تناقض رسیدیم معلوم می‌شود، فرضی که در گام اول در نظر گرفته بودیم نادرست است. بنابراین مطلوب مسئله(حکم) باید درست باشد.

به‌عنوان مثال داریم:

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 عددهای صحیح هستند و b_1, b_2, b_3, b_4 و b_5 همان عددهای صحیح می‌باشند، که به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$ عددی زوج است.

برای اثبات فرض می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر پنج عامل $a_1 - b_1$، $a_2 - b_2$، $a_3 - b_3$، $a_4 - b_4$ و $a_5 - b_5$ هم باید فرد باشند و در نتیجه مجموع آنها نیز باید عددی فرد باشد که یک تناقض است به دلیل آنکه مجموع آن‌ها صفر است و صفر زوج می‌باشد، در نتیجه فرض خلف باطل و حکم درست است.

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + a_4 - b_4 + a_5 - b_5 = 0$$

گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره، یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر p و q دو گزاره هم‌ارز (یعنی p، q هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست هستند و در نتیجه $p \Leftrightarrow q$ یک گزاره درست است، به‌طور مثال ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$, $(a, b \in \mathbb{R})$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ درست نیست.

نکته اگر ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آنگاه p و q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

نکته اگر p و q و r سه گزاره باشند و $p \Leftrightarrow q$ و $r \Leftrightarrow q$ گزاره‌های درست باشند، در این صورت درستی یا نادرستی هریک از سه گزاره p، q تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم می‌کند. توجه داشته باشید ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعداد متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به توضیحات داده شده می‌توان اثبات به روش بازگشتی را تعریف کرد.

۵-اثبات بازگشتی: اگر بتوان حکمی را به کمک عملیات جبری ساده کرد تا به یک رابطه همیشه درست طی چند مرحله برسیم، در این صورت حکم با یک گزاره همیشه درست هم‌ارز است. پس حکم نیز درست است. (اگر $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ در این صورت اثبات درستی یا نادرستی هریک از سه گزاره، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم می‌کند.)

به‌طور مثال حکم زیر را به روش بازگشتی اثبات می‌کنیم.

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

حکم با یک گزاره همیشه درست هم‌ارز است پس حکم نیز درست است.

سؤالات طبقه‌بندی

تست‌های آموزشی

۱- کدام عدد، کلیت حکم «برای هر عدد طبیعی زوج n ، $2^n + 1$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲- برای اثبات کدام‌یک از گزاره‌های زیر استدلال به روش «اثبات مستقیم» مورد نیاز است؟

۱) برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۲) اگر $a > 0$ باشد آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$

۳) حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) برای هر $n \geq 2$ ، $(n^3 - n)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۳- a_1 ، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 ، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. حاصل $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ چگونه است؟

۱) عددی فرد است ۲) عددی زوج است ۳) صفر است ۴) عددی اول است

۴- مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، آنگاه n کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟ $(n \in S)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۵- اگر n یک عدد طبیعی باشد، گزاره « n یک عدد زوج است» با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

۱) فرد بودن n^2 ۲) زوج بودن n^3 ۳) فرد بودن n^3 ۴) زوج بودن $(n-1)^2$

تست‌های تثبیتی

۶- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{6}$, $\sqrt{216}$ ۲) $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$ ۳) $\sqrt{216}$, $\sqrt{18}$ ۴) $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$

۷- یکی از مثال‌های نقض برای حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت» کدام عدد است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۸- با کدام استدلال می‌توان ثابت نمود «عدد چهار رقمی به صورت $\overline{abab}$ بخش‌پذیر بر ۱۰۳» وجود ندارد؟

۱) مثال نقض ۲) اثبات مستقیم ۳) استقرایی ۴) تمثیلی

۹- کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) عدد $2^{2^n} + 1$ به‌ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است.

۲) اگر برای هر سه مجموعه A و B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

۳) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

۴) به‌ازای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.

۱۰- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۱۱- کدام عدد کلیت حکم «برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^۲ + n + ۹۷$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟
۱) ۶۷ ۲) ۷۱ ۳) ۹۷ ۴) ۱۰۱

۱۲- کدام‌یک از گزینه‌های زیر از نوع اثبات مستقیم می‌باشد؟
۱) روش بازگشتی ۲) مثال نقض ۳) برهان خلف ۴) استدلال استنتاجی

۱۳- برای اثبات این‌که « $۲\sqrt{۲} + ۲$ عددی گنگ است» بهتر است از کدام نوع استدلال استفاده کنیم؟
۱) استنتاجی ۲) مثال نقض ۳) برهان خلف ۴) اثبات بازگشتی

۱۴- روش استدلال در کدام‌یک از گزاره‌های زیر با بقیه فرق دارد؟
۱) اگر x یک عدد گنگ باشد، آنگاه $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.
۲) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، آنگاه $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.
۳) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
۴) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۱۵- اثبات کدام قضیه زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟
۱) عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.
۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.
۳) اگر x یک عدد گنگ باشد آنگاه $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.
۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، به‌صورت $n + (n+۱) + (n+۲) = ۳n + ۳ = ۳(n+۱) = ۳k$ است.

۱۶- برای اثبات گزاره «اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$» کدام روش استدلال مناسب‌تر است؟
۱) برهان خلف ۲) اثبات بازگشتی ۳) اثبات به روش اشباع ۴) اثبات مستقیم

۱۷- هم‌ارزی $P_۱ \vee P_۲ \vee ... P_n \Rightarrow r \equiv (P_۱ \Rightarrow r) \wedge (P_۲ \Rightarrow r) \wedge ... \wedge (P_n \Rightarrow r)$ کدام‌یک از روش‌های استدلال را توجیه می‌کند؟
۱) مثال نقض ۲) برهان خلف
۳) اثبات مستقیم ۴) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

۱۸- در اثبات $a > ۰ , b > ۰$ و $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ به روش بازگشتی، گزاره همیشه درست کدام است؟
۱) $(a+b)^۲ \geq ۰$ ۲) $(۲a-b)^۲ \geq ۰$ ۳) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \geq ۰$ ۴) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲ \geq ۰$

۱۹- کدام‌یک از روابط زیر همواره برقرار است؟ $(x > ۰ , y > ۰)$
۱) $\frac{x+y}{۲} \leq \sqrt{xy}$ ۲) $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ ۳) $xy \leq \frac{\sqrt{x+y}}{۲}$ ۴) $xy \geq \frac{\sqrt{x+y}}{۲}$

۲۰- برای اثبات $\frac{a^۲ + b^۲}{۲} \geq ab$ از کدام شیوه استدلال استفاده می‌کنیم؟ (a و b دو عدد نامنفی هستند.)
۱) برهان خلف ۲) استقرایی ۳) بازگشتی ۴) تمثیلی

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح

عدد صحیح $a \neq ۰$ را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گوئیم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شـود به‌طوری‌که $a = bq$ و در این‌صورت می‌نویسـیم $b \mid a$ و آن‌را به‌صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) a بر b بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \hline ۰ & \end{array} \leftrightarrow a = bq$$

۲) b می‌شمارد (عاد می‌کند) a را.

۳) a مضربی از b است.

۴) b مقسوم‌علیه a است.

با توجه به تعریف رابطه عاد کردن به‌طور مثال داریم:

الف) $۷ \mid ۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = ۷ \times \underbrace{(۹)}_{q}$

ب) $-۷ \mid ۲۸ \Leftrightarrow ۲۸ = -۷(-۴)$

پ) $۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲ \mid ۲۶ \,,\, ۱۳ \mid ۲۶$

ت) $۰ = ۱۸ \times (۰) \Rightarrow ۱۸ \mid ۰$

عاد کردن در یک نگاه

مضرب

$b \mid a$

مقسوم علیه

نکته شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر تا کار بیهوده‌ای است و لذا صفر هیچ عدد غیرصفری را نمی‌شمارد یا هیچ عدد غیرصفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد. یعنی: $۰ \nmid a$

توجه اگر $۰ \mid a$ آن‌گاه $a = ۰$ (اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرار دارد پذیرفته می‌شود.)

نکته هر عدد بر خودش و ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی صحیح باشد آن‌گاه $۱ \mid a$ و $a \mid a$ (عدد ۱، هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد بر خودش بخش‌پذیر است.)

بخش‌پذیری‌های بدیهی

برای هر عدد صحیح a متعلق به $\mathbb{Z}$ روابط زیر برقرار است:

الف) $a \mid ۰$

ب) $\pm ۱ \mid a$

پ) $a \mid a$

ت) $۰ \mid ۰$

ث) $۰ \nmid a$

ج) اگر $۰ \mid a \Rightarrow a = ۰$

نکته مقسوم‌علیه‌های هر عدد، آن عدد را می‌شمارند.

$a \mid ۱۲ \Rightarrow a \in \{\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \pm ۶, \pm ۱۲\}$

خواص رابطه عاد کردن

۱) علامت در بخش‌پذیری بی‌تأثیراست ولی ترتیب مهم است.

$$a \mid b \Leftrightarrow -a \mid b \Leftrightarrow a \mid -b \Leftrightarrow -a \mid -b$$

۲)

$$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b| \quad (b \neq 0)$$

۳) اگر $b \mid a$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b$ (رابطهٔ عاد کردن خاصیت جابه‌جایی ندارد)

به‌طور مثال: ۶|۳ ولی ۶∤۳

۴) برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:

$$\begin{cases} a \mid b \\ \text{و} \\ b \mid a \end{cases} \Leftrightarrow |a| = |b|$$

۵) رابطه عاد کردن خاصیت تعدی دارد.

$$\begin{cases} a \mid b \\ \text{و} \\ b \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid c$$

۶) اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه هر مضربی از b را نیز می‌شمارد یعنی: (عکس این نکته الزاماً برقرار نیست.)

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow a \mid nb & n \in \mathbb{N} \\ a \mid b \Rightarrow a \mid b^n & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۷)

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

۸)

$$a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb \qquad (m \neq 0)$$

۹) اگر $a \mid bc$ نمی‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند زیرا به‌طور مثال:

الف) ۹|۳ , ۶|۳ , ۹×۶|۳

ب) ۴∤۶ , ۳∤۶ , ۴×۳|۶

۱۰) تغییرسمت راست:

ضرب سمت راست بخش‌پذیری در هر عدد صحیح مجاز است همچنین جمع و تفریق در سمت راست با مضارب چپ مجاز است.

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid nb \\ a \mid b \pm ma \end{cases}$$

۱۱) دو طرف یک رابطه بخش‌پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در هم ضرب کرد ولی جمع و تفریق مجاز نیست.

$$\begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \longrightarrow ac \mid bd$$

۱۲) اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، مجموع و تفاضل و حاصل‌ضرب آن‌ها را نیز می‌شمارد، اما عکس این جمله لزوما درست نیست.

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid (b \pm c) \\ a \mid bc \end{cases}$$

۱۳) اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، هر ترکیب خطی از آن‌ها را می‌شمارد.

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid mb + nc$$

نکات عاد کردن:

۱)

$$\begin{cases} a \mid b \\ \text{و} \\ |b| < |a| \end{cases} \Rightarrow b = ۰$$

۲) اگر عددی مجموع یا تفاضل دو عدد را عاد کند، آن‌گاه الزاماً نمی‌توان نتیجه گرفت تک‌تک آن‌ها را عاد می‌کند.

به‌عنوان مثال $۲ \mid ۸$ ، $۸ = ۱ + ۷$ و $۲ \nmid ۷$, $۲ \nmid ۱$

۳)

$$a^n \mid b \Rightarrow a \mid b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$۲^۳ \mid ۳۲ \Rightarrow ۲ \mid ۳۲$: نمونه

۴) اگر $a^n \mid b^m$ و $\begin{vmatrix} n & m \\ t & k \end{vmatrix} \geq ۰$ باشد آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که $a^t \mid b^k$

نکات توان رسانی عاد کردن: اگر n عددی طبیعی باشد در این‌صورت:

۱) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

۲) $a \mid b \xrightarrow{n \leq m} a^n \mid b^m$

۳) $a - b \mid a^n - b^n$ به‌ازای همه مقادیر n برقرار است.

۴) $a + b \mid a^n + b^n$ به‌ازای n های فرد برقرار است.

۵) $a + b \mid a^n - b^n$ به‌ازای n های زوج برقرار است.

۶) $a - b \mid a^n + b^n$ به‌ازای هیچ n ای برقرار نیست.

۷) $a^m - b^m \mid a^n - b^n$ $\quad \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$

۸) $a^m + b^m \mid a^n + b^n$ $\quad \frac{n}{m}$ ، فرد باشد

۹) $a^m + b^m \mid a^n - b^n$ $\quad \frac{n}{m}$ ، زوج باشد

۱۰) $a^m - b^m \mid a^n + b^n$ به‌ازای هیچ n ای برقرار نیست.

توجه: در تمام حالات به شرط یکسان بودن توان‌ها دقت کنید.

سؤالات طبقه‌بندی

تست‌های آموزشی

۲۱- اگر $a|۲۰$ و $a|۳۰۰$ آن‌گاه برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۲- اگر $a-b|a$ آن‌گاه کدام گزینه زیر درست است؟

۱) $a|a-b$ ۲) $b|a-b$ ۳) $b|a$ ۴) $a-b|b$

۲۳- چه مقدار طبیعی برای x وجود دارد که در رابطه $x+۴|۲۴$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۴- اگر $\frac{n^۲-۵n+۱۰}{n-۴}$ عددی صحیح باشد، چند جواب برای n موجود است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۵- اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$ آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۷- ۴) ۷

تست‌های تثبیتی

۲۶- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $a|b-a \Leftrightarrow a|b+a^۲$

۲) $a+b|a^n-b^n$

۳) $a+b|a \Leftrightarrow a-b|b$

۴) $a^۲|b^۲ \Leftrightarrow a^۲|b^۳$

۲۷- اگر $a^۳|b^۵$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $a|b$ ۲) $a^۲|b^۳$ ۳) $a^۴|b^۳$ ۴) $a|b^۲$

۲۸- اگر $a-b|a$ آن‌گاه کدام گزینه زیر نادرست است؟

۱) $a-b|b^۲$ ۲) $a-b|a+b$ ۳) $a|b$ ۴) $a-b|۲a+۳b$

۲۹- اگر $a^۳|۲۷$ و $a|b^۲$ کدام نتیجه درست خواهد بود؟

۱) $۳|b$ ۲) $b|۳$ ۳) $a|۳$ ۴) $۲۷|ab$

۳۰- اگر $a|b$ و $c|d$ آن‌گاه کدام گزینه نمی‌تواند همواره درست باشد؟

۱) $ac|bd$ ۲) $a^n|b^n$ ۳) $a|۳b^۴$ ۴) $a+c|b+d$

۳۱- اگر $ab=cd$ (a و b و c و d اعداد صحیح و ناصفرند)، کدام گزینه همواره نادرست است؟

۱) $cd|ab$ ۲) $a|cd$ ۳) $a^۲|c^۲d^۲b$ ۴) $cd|b$

۳۲- اگر $۱۳|۲a-۳b+۱$ و $۱۳|a+۵b+k$ آن‌گاه کوچک‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۳- عدد $a^{36}-1$ بر کدام یک همواره بخش‌پذیر نیست؟

۱) a^9-1 ۲) a^9+1 ۳) a^4-1 ۴) a^4+1

۳۴- عدد $a^{12}+1$ بر کدام بخش‌پذیر است؟

۱) a^2-1 ۲) a^3+1 ۳) a^4+1 ۴) a^6+1

۳۵- عدد 9^7-2^7 بر کدام همواره بخش‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۳۶- تعداد عنصرهای مجموعه $\{n : 65 \mid 2^n+1\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۷- مجموعه $A=\{n : 26 \mid 3^{3n}-1\}$ چند عضو دو رقمی دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۳۸- عدد $4^{2n+1}+1$ برکدام‌یک همواره بخش‌پذیر است؟

۱) ۳ ۲)۴ ۳)۵ ۴) ۶

۳۹- به‌ازای کدام مقدار n مجموع ارقام عدد $10^{3n}-10^n$ برابر ۲۱۶ است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۴۰- مجموعه $A=\{n : 80 \mid 3^n-1\}$ چند عضو سه رقمی دارد؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۲۶ ۴) ۲۲۷

۴۱- به‌ازای چند مقدار طبیعی a، عدد a^2+2 بر $a+2$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۴۲- هر گاه $x+4 \mid 2x+1$ آن‌گاه چند جواب صحیح برای x وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳)۴ ۴) ۵

۴۳- اگر $a-2 \mid 3a^2-2a+1$ آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۴- بزرگ‌ترین مقدار n که به‌ازای آن $n+3 \mid 3n^2-5n+8$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲)۴۷ ۳)۴۵ ۴)۲۵

۴۵- به‌ازای چند عدد صحیح n رابطه $3n-1 \mid 7n+4$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶- چند نقطه روی منحنی $2xy+6y=x+7$ با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۷- روی منحنی $yx+3y-2x-1=0$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸- معادله $\frac{1}{2}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵