



علوی

حسابان ۱ (پایه یازدهم)

کامران میرزاپور - فرزاد تندرو

مجموعه کتابهای همراه علوی

سخن‌ناشر

به نام آن‌که هستی نام از او یافت

کتاب پیش رو، مجموعه‌ای از اهم مباحث و نکات تحت عنوان درس‌نامه و همچنین تعداد قابل توجهی سؤال چهار گزینه‌ای تألیفی و گردآوری شده توسط برترین مدرسان کشور می‌باشد. شبان به ذکر است تقریباً تمام سؤالات کنکورهای سراسری سال‌های گذشته نیز که با کتاب جدید هم‌خوان هستند، در این کتاب گردآوری شده است. برای تمامی سؤالات، پاسخ‌نامه تشریحی کامل در اختیار شماست و در تمام قسمت‌ها، مؤلفین محترم نکته‌ای آموزشی و تحلیلی را نیز به پاسخ‌نامه اضافه کرده که این امر سبب شده است تا این کتاب، علاوه بر از ایجاد آشنایی مخاطب با نحوه پرسش و الگوی پاسخ‌گویی، به یادگیری و تکمیل اطلاعات علمی دانش‌آموز نیز کمک کند؛ و مهم‌تر از همه این‌که در تمام سؤالات و پاسخ‌ها، الگوی اسنادار د سؤالات کنکور در اولویت قرار داشته است.




از شما نیز خواهش می‌کنیم تا ایده‌ها و فکرهای بکر خود را در زمینه ارتقاء و بهبود این کتاب آموزشی با ما در میان بگذارید.

امیدواریم این کتاب قدمی، هر چند کوچک، در مسیر فراگیری علم و رشد آموزشی ایران عزیزمان باشد.

راهنمای استفاده از کتاب:

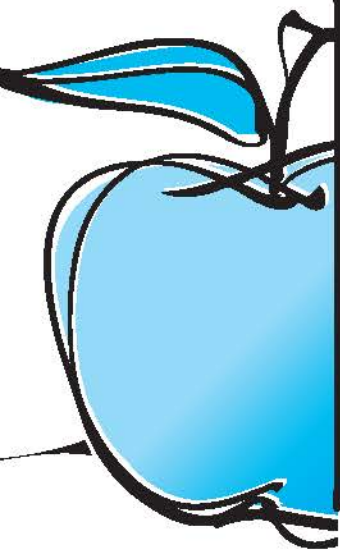
۱) ابتدا جزوه آموزشی دبیر خود را به‌عنوان منبع اصلی و پس از آن، درس‌نامه هر قسمت را که در شروع فصل آمده، با دقت مطالعه کنید.

در جریان باشید که:

سطح سؤالات در کتاب پاسخ‌نامه مشخص شده است که جهت ارزیابی و تخمین زمان پاسخ‌گویی می‌توانید از آن‌ها استفاده کنید. سؤالات آسان با نماد ، سؤالات متوسط با نماد  و سؤالات دشوار با نماد  مشخص شده است.

شماره سؤالاتی که با رنگ خاکستری مشخص شده‌اند سؤالات تشبیهی می‌باشند.

۲) در آخر هر فصل، سؤالات جامع و ترکیبی همان فصل با عنوان آزمون قرار داده شده است؛ از این آزمون‌ها نیز جهت ارزشیابی و سنجش میزان یادگیری می‌توانید بهره ببرید.



سیر تکاملی دانش‌های پیشری از سال‌های دور تا کنون همواره در زیر سایهٔ پیشرفت دانش ریاضی صورت گرفته است و مشکلاتی که در شناخت انسان از جهان رخ داده و با بیان ریاضی توجیه نشده در زمرهٔ معماهای بشر باقی مانده است. مثلاً علم فیزیک از قرن نوزدهم به بعد تکامل چشمگیری داشته و نسبت به علوم دیگر متمایز گردیده و این را مدیون بکار بستن روش‌های ریاضی در مطالعات فیزیک است به قولی فیزیک بهشت ریاضیات است و افراد ریاضیدان در فیزیک به تمام چیزهایی که می‌خواهند نائل می‌شوند. در کتاب فعلی دو تغییر عمدهٔ مثبت نسبت به کتاب قبلی اعمال شده است.

اولاً مطالب هر فصل بسیار پایه‌ای و متناسب با کتاب جدید توضیح داده شده تا تمام مفاهیم فصول مختلف حسابان «۱» به سادگی تفهیم شود. ثانیاً تست‌های کامل‌تر مرتبط با کنکور و گاه‌ها با درجهٔ سختی بیشتر از کنکور در کتاب قرار داده شده تا دانش‌آموزان بدانند که مطالب یاد گرفته شده در کلاس و مدرسه آیا کفاف مطالب کنکور را می‌دهد یا خیر.

در این کتاب با توجه به این‌که مؤلف اذعان دارد که اگر دانش‌آموزان در سال

یازدهم شروع به حل تست‌های کنکور مربوطه نکنند هیچ موفقیتی در سال دوازدهم در

حل تست‌ها نخواهند داشت، تست‌های منسجم و مرتبط با مباحث کتاب جدید حسابان

«۱» قرار داده شده تا با حل آن‌ها تسلط کامل به مباحث کتاب احراز شود.

تمام سعی مؤلف در کتاب این بوده که دانش‌آموزان دیگر نیازی به کتاب‌های دیگر

مکمل حسابان «۱» نداشته باشند و تمام نیازهای درس حسابان «۱» را با حل تست‌ها

و مطالعهٔ همین کتاب برطرف کنند.

در پایان هر فصل یک آزمون از آن فصل طراحی شده تا دانش‌آموزان بعد از مطالعهٔ کامل

فصل و حل تست‌های آن فصل خود را بیازمایند.

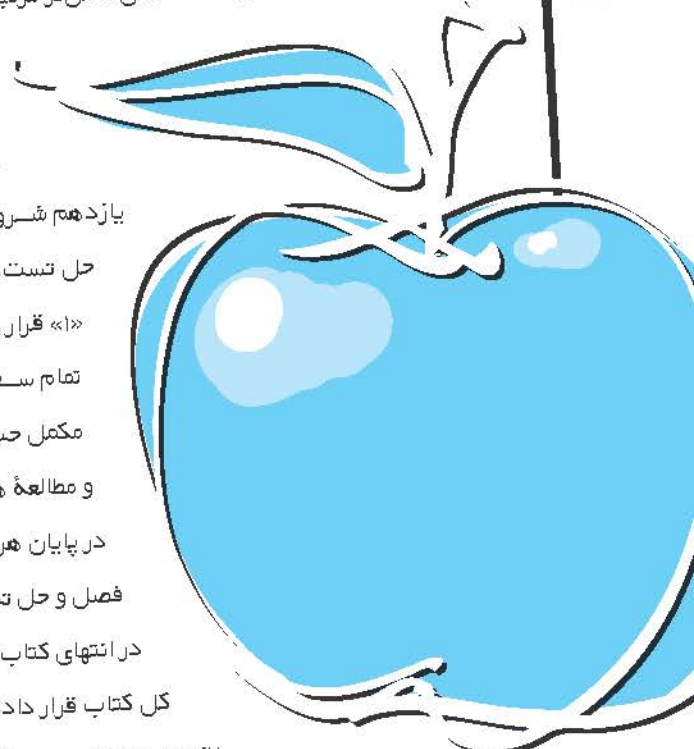
در انتهای کتاب نیز سه سری تست از کل کتاب برای آخرین سنجش دانش‌آموزان از حسابان

کل کتاب قرار داده شده تا وظیفه خود را به نحو احسن انجام داده باشیم.

لازم می‌دانم از همسر گرانقدرم که بسیار برای تهیهٔ این کتاب مرا یاری نموده تشکر و قدردانی ویژه

داشته باشم.

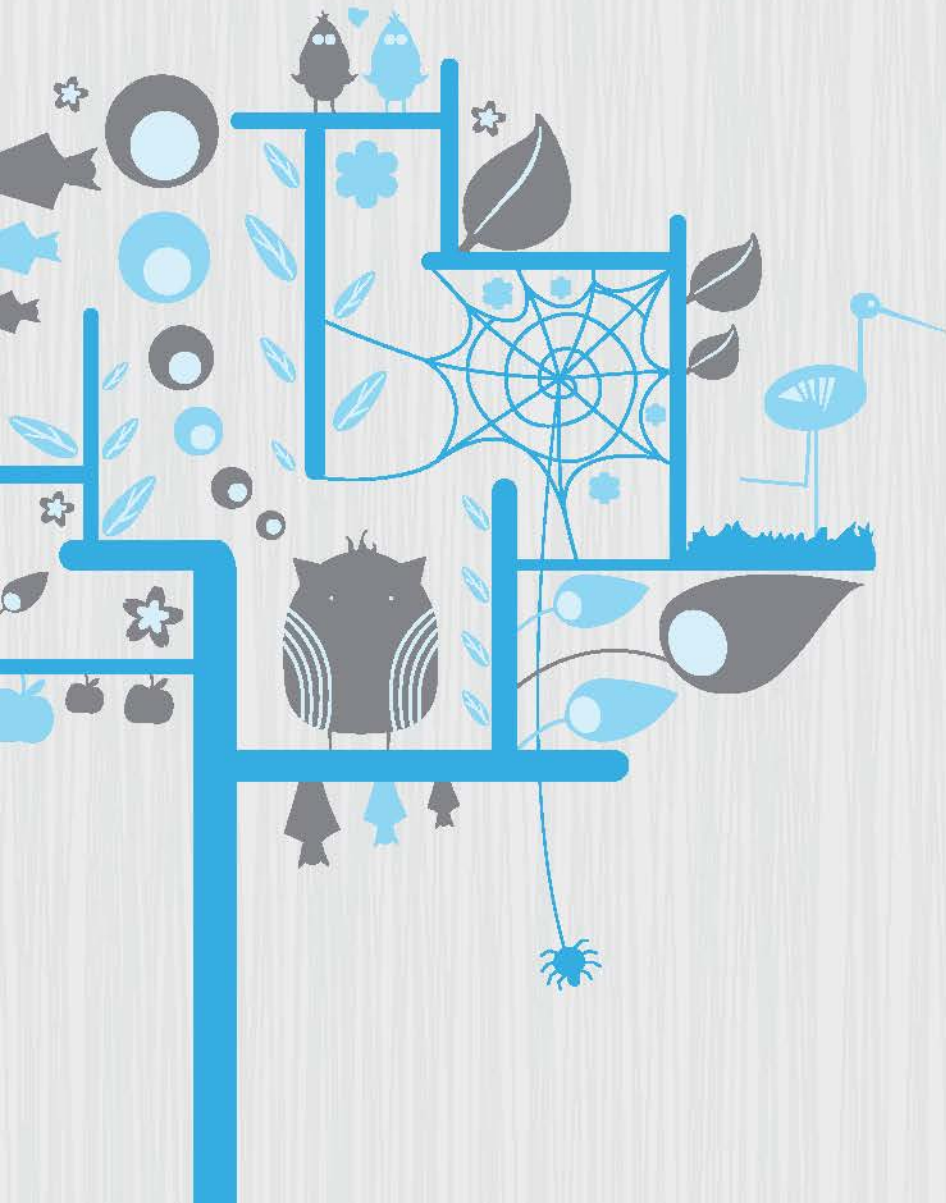
کامران میرزاپور



تقدیم به:

همه آن‌ها که تا امروز در مسیر آموزش تلاش کرده‌اند. (■)

و شما که قرار است در آینده نزدیک، نقش علمی مهمی ایفا کنید. (■)



فهرست

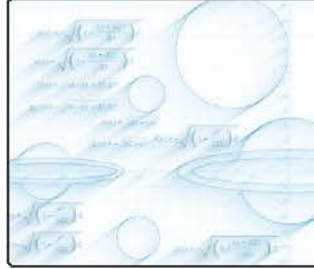
۷

فصل اول: جبر و معادله



۸۷

فصل دوم: تابع



۱۶۳

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی



۲۱۱

فصل چهارم: مثلثات



۲۶۷

فصل پنجم: حد و پیوستگی



۳۴۲

آزمون‌های جامع



فصل اول

جبر و معادله

درس ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n



مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید؛ یعنی:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times (20 + 1)}{2} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

مثال: بر محیط دایره‌ای ۳۰ نقطه قرار دادیم و همه آن‌ها را به هم وصل کردیم. چند پاره‌خط به دست می‌آید؟

پاسخ: از نقطه اول به ۲۹ نقطه دیگر وصل می‌کنیم و از نقطه دوم به ۲۸ نقطه دیگر وصل می‌کنیم (به نقطه اول چون تکراری است وصل نمی‌کنیم) و به همین ترتیب داریم:

$$29 + 28 + 27 + \dots + 1 = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

مثال: در بین ۱۵ نفر به چند طریق می‌توان گروه‌های ۲ نفره انتخاب کرد؟

پاسخ: نفر اول با هر یک از ۱۴ نفر دیگر گروه ۲ نفره تشکیل می‌دهد، سپس نفر دوم با هر یک از ۱۳ نفر دیگر گروه ۲ نفره تشکیل می‌دهد، پس داریم:

$$14 + 13 + 12 + \dots + 1 = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

مجموع جملات دنباله حسابی



قبل از این که رابطه مجموع دنباله‌های حسابی یا عددی را مطرح کنیم، دنباله حسابی را یادآوری می‌کنیم: دنباله‌ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید را دنباله حسابی می‌گوییم و به آن مقدار ثابت قدر نسبت گفته می‌شود به عنوان مثال دنباله $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۴ می‌باشد. جمله n ام یا جمله عمومی هر دنباله حسابی از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید که a_1 جمله اول و d قدر نسبت و n شماره جمله است. در دنباله حسابی به نکته‌های زیر توجه کنید:

۱- اگر a, b, c سه جمله باشند که تشکیل دنباله حسابی بدهند آن‌گاه:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

۲- اگر a_m جمله m ام و a_n جمله n ام یک دنباله حسابی باشد داریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

-۳

$m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$ (جملات مختلف یک دنباله حسابی هستند.)

۴- اگر بخواهیم بین a و b به تعداد m عدد درج کنیم که همگی تشکیل دنباله حسابی بدهند، آن‌گاه قدر نسبت از رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می‌آید.

اکنون پس از یادآوری یک دنباله حسابی، رابطه مجموع جملات دنباله حسابی را مطرح می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

در رابطه بالا S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی و a_1 جمله اول و d قدر نسبت و n تعداد جملات و a_n هم جمله n ام یا جمله عمومی است و اگر در مسئله جمله n ام یا a_n داده شده باشد از رابطه سمت چپ استفاده می‌کنیم و ضمناً نو نکته زیر را به خاطر بسپارید:

$$S_1 = a_1 \quad (1) \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (2)$$

مثال: در یک دنباله حسابی $S_n = 3n^2 + n$ است. S_p و a_n را تعیین کنید.

$$S_p = 3 \times 20^2 + 20 = 1220$$

پاسخ: منظور از S_p مجموع بیست جمله اول دنباله است که داریم:

و سپس جمله عمومی یا a_n را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \Rightarrow 3(1)^2 + 1 = 4 \Rightarrow a_1 = 4 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 3(2)^2 + 2 = 14 \Rightarrow 4 + a_2 = 14 \Rightarrow a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow d = 10 - 4 = 6$$

و داریم: $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \times 6 = 6n - 2$ و ساده شده آن به صورت $a_n = 6n - 2$ می‌باشد.

مثال: مجموع تمام اعداد ۳ رقمی که در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده ۲ دارند، کدام است؟

پاسخ: اولین عدد ۳ رقمی که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۹ برابر ۲ است. عدد ۱۰۱ است، پس عدد دوم سه رقمی برابر ۱۱۰ و عدد سوم برابر ۱۱۹ و به همین ترتیب آخرین عدد سه رقمی با این شرایط عدد ۹۹۲ است و داریم:

$$101 + 110 + 119 + \dots + 992 = \frac{100}{2} \times (101 + 992) = 54650$$

$$\frac{992 - 101}{9} + 1 = 100$$

در پاسخ بالا تعداد اعداد سه رقمی ۱۰۰ تا بوده زیرا:

و یادآوری می‌کنیم تعداد جملات دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$1 + \frac{\text{کوچکترین عدد} - \text{بزرگترین عدد}}{\text{فاصله دو عدد متوالی}} = \text{تعداد}$$



مثال: علی برای دوره کردن در سه‌ماهش در اردیبهشت در روز اول ۲ ساعت مطالعه می‌کند و قرار می‌گذارد هر روز ۱۵ دقیقه بیشتر مطالعه کند. حساب کنید در ماه اردیبهشت چند دقیقه مطالعه خواهد کرد؟

پاسخ:

$$S_{31} = \frac{31}{2} [60 \times 2 + (31 - 1) \times 15] = \frac{31}{2} [120 + 450] = \frac{31}{2} \times 570 = 8835$$



$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

مجموع جملات دنباله هندسی



قبل از مطرح کردن مجموع جملات هندسی ابتدا دنباله هندسی را یادآوری می‌کنیم: دنباله‌ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) با ضرب عدد ثابت q در جمله قبلی به دست می‌آید را دنباله هندسی می‌گویند و به این مقدار ثابت قدر نسبت گفته می‌شود به عنوان مثال دنباله اعداد $3, 6, 12, 24, \dots$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ است. جمله n ام یا جمله عمومی دنباله‌های هندسی از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ به دست می‌آید که a_1 جمله اول و q قدر نسبت و n شماره جمله است و در دنباله هندسی به نکته‌های زیر توجه کنید:

(۱) اگر a, b, c سه جمله باشند که تشکیل دنباله هندسی بدهند، آن‌گاه $ac = b^2$

(۲) اگر a_m جمله m ام و a_n جمله n ام یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}} \quad (m-n \text{ فرجه این رادیکال است.})$$

(۳)

$m + n = p + q \Rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_q$ (جملات مختلف یک دنباله هندسی هستند.)

(۴) اگر بخواهیم بین b, a به تعداد m عدد درج کنیم که همگی تشکیل دنباله هندسی بدهند، آن‌گاه قدر نسبت از رابطه $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ به دست می‌آید. (فرجه رادیکال است.)

اکنون با یادآوری بالا رابطه مجموع جملات دنباله هندسی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

در رابطه بالا a_1 جمله اول و S_n مجموع n جمله اول و q قدر نسبت و a_n جمله عمومی یا جمله n ام است و در مواردی که جمله عمومی یا جمله n ام در مسئله داده شود از رابطه سمت چپ استفاده می‌کنیم و ضمناً نکته‌های زیر را به یاد داشته باشید:

(۱)

$$s_1 = a_1$$

(۲) اگر در یک دنباله هندسی $1 < |q| < \infty$ و $q \neq 0$ باشد و تعداد جملات نامتناهی باشد، مجموع تمام جملات هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

(۳) حاصل ضرب n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و جمله عمومی a_n و قدر نسبت q از رابطه $P_n = (a_1 \times a_n)^{\frac{n}{2}}$ به دست می‌آید.

مثال: مجموع دوازده جمله اول دنباله هندسی زیر را تعیین کنید.

$$-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \dots$$

پاسخ: در دنباله بالا $n = 12$ (تعداد خواسته شده سؤال) و $q = \frac{1}{2}$ و $a_1 = -8$ است، پس داریم:

$$S_{12} = \frac{-8 \times (1 - (\frac{1}{2})^{12})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-8 \times (1 - 2^{-12})}{\frac{1}{2}} = -16 \times (1 - \frac{1}{2^{12}}) = -16 + \frac{16}{4096}$$

$$= \frac{-65536 + 16}{4096} = \frac{-65520}{4096} = -\frac{4095}{256}$$

مثال: در یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲، مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع ۴ جمله اول است؟

پاسخ:

$$q = 2 \Rightarrow \begin{cases} S_8 = \frac{a_1(1-2^8)}{1-2} = -a_1(1-2^8) = (2^8-1) \times a_1 \\ S_4 = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = (2^4-1) \times a_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{(2^8-1)a_1}{(2^4-1)a_1} = 2^4 + 1 = 17$$

مثال: برای محفظت از تابش مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محفظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۸ درصد کاهش یابد؟

پاسخ: شدت تابش پس از عبور از لایه اول $\frac{1}{2}$ و پس از عبور از لایه دوم $\frac{1}{4}$ می‌شود و به همین ترتیب و اگر از n لایه استفاده کنیم، به میزان $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

کاهش خواهیم داشت.

و در این دنباله $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ داریم $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{98}{100}$ و داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{98}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{100}$$

$$\Rightarrow 2^n \geq 50 \xrightarrow[\text{به جای } n]{\text{با آزمایش کردن}} n = 6$$

مثال: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \dots$$

پاسخ: در جملات دنباله بالا قدر نسبت $-\frac{1}{4}$ است و $|\frac{1}{4}| < 1$ و تعداد جملات نامتناهی است، پس داریم:

$$\text{مجموع طبق نکات بالا} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

سوالات طبقه بندی

۱

۱- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله حسابی است؟

(۱) $t_n = 8n + 1$ (۲) $t_n = n^2$ (۳) $t_n = \frac{1}{n}$ (۴) $t_n = n^3 + n$

۲- در یک دنباله حسابی، مجموع سه برابر جمله دوازدهم و چهار برابر جمله پنجم، برابر ۳۵ است. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(۱) $\frac{35}{8}$ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۶

۳- چند جمله از دنباله حسابی $a_1 = 170$ و $a_p = 161$ مثبت است؟

(۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹

۴- بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطه حسابی با قدر نسبت ۴ می‌توان درج کرد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵- در دنباله‌های حسابی $(3, 7, 11, \dots)$ و $(4, 7, 10, \dots)$ ، چند جمله کوچک‌تر مساوی ۵۰ وجود دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲

۶- بیست جمله اول دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 3$ و قدر نسبت $d_1 = 2$ با بیست جمله اول دنباله حسابی با جمله اول $b_1 = 2$ و قدر نسبت

$d_2 = 3$ ، چند جمله مساوی دارند؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۷- اعداد $1 + x, x + 5, x + 4$ و $4x + 4$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۶ (۴) -۵

۸- مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، برابر ۳ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۴- است. تفاضل عدد کوچک‌تر از عدد بزرگ‌تر کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

۹- طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه اعداد طبیعی هستند که تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. وتر این مثلث کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۱۰- مجموع n جمله اول دنباله حسابی $1, 2, 3, \dots$ کدام است؟

(۱) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۲) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۳) $n(n+1)$ (۴) $n(n-1)$

۱۱- یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و در نظر دارد که پس از گذشت هر سال، مرتباً ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل

بیفزاید. پس از گذشت ۲۰ سال، جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

(۱) ۳۳۱۰۰ (۲) ۳۱۳۰۰ (۳) ۱۳۳۰۰ (۴) ۳۰۳۱۰

۱۲- اعداد $\frac{5}{y}, \dots, x, y, 1$ ، چهار جمله اول از یک دنباله حسابی اند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۶)

(۱) ۵۷ (۲) $62/5$ (۳) $67/5$ (۴) ۶۸

۱۳- در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

(۱) $22/5$ (۲) ۲۵ (۳) $27/5$ (۴) ۳۰

- ۱۴- در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات اضافه شود، آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر اضافه خواهد شد؟
 (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰
- ۱۵- اگر مجموع هشت جمله اول از دنباله حسابی $a_1 = 1 + 2p$ و $a_8 = p - 1$ برابر ۶۰ باشد ($S_8 = 60$)، قدر نسبت دنباله چقدر است؟
 (آزاد ریاضی صبح-۸۸)
 (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) -۹ (۴) -۷
- ۱۶- در دنباله حسابی $\dots, -21, X, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟
 (آزاد ریاضی صبح-۸۷)
 (۱) -۱۳۵ (۲) -۱۵۰ (۳) -۷۵ (۴) -۲۷۰
- ۱۷- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟
 (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) $8/5$ (۴) ۹
- ۱۸- از مبلغ A ریال پس انداز، مرتبه اول $X_1 = \frac{A}{15}$ ، مرتبه دوم $X_2 = \frac{1}{15}A + X_1$ ، مرتبه سوم $X_3 = \frac{1}{15}A + X_2$ و... برداشت می کنیم. با چنین نوع برداشت، پس از چند مرتبه، موجودی به صفر می رسد؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۱۹- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، $\dots, (7, 9, 11), (3, 5), (1)$. جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟
 (سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۱)
 (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳
- ۲۰- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟
 (سراسری ریاضی-۹۰)
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۴ (۴) ۳۸
- ۲۱- مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟
 (سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۰)
 (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸
- ۲۲- اگر مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی از مجموع ۱۱ جمله اول همین دنباله، ۵ واحد کمتر باشد، مجموع ۲۱ جمله اول این دنباله کدام است؟
 (۱) ۹۵ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۵ (۴) ۸۵
- ۲۳- در یک دنباله حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_4 = 5 + \sqrt{2}$. مجموع چهار جمله چهارم این دنباله چقدر از مجموع چهار جمله دومش بیشتر است؟
 (آزاد ریاضی عصر-۸۸)
 (۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲
- ۲۴- مجموع $2n + 1$ جمله اول یک دنباله حسابی ۱۴۳ و جمله وسط در این جملات ۱۳ است. n کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
- ۲۵- بین دو عدد $2 - \sqrt{3}$ و $8 + \sqrt{3}$ تعداد ۵ واسطه حسابی درج نموده ایم. مجموع این واسطه ها کدام است؟
 (۱) ۵۰۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۳۰۰
- ۲۶- در یک دنباله حسابی جمله دهم ۲۰ می باشد، مجموع ۱۹ جمله اول این دنباله کدام است؟
 (۱) ۳۶۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۳۸۰ (۴) ۷۵۰
- ۲۷- جواب معادله $45 = (44 + X) + (4 + X) + (8 + X) + \dots + (5 + X) + (2 + X)$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۷



۲۸- حاصل $S = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \dots$ کدام است؟

- (۱) ۴۸۵۱ (۲) ۳۸۵۱ (۳) ۴۷۵۱ (۴) ۴۸۴۱

۲۹- اگر در یک دنباله حسابی مجموع ۸ جمله اول با مجموع ۱۲ جمله اول آن برابر باشد، مجموع 20 جمله اول کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۳۰ (۴) صفر

۳۰- مجموع تمام اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده برابر با یک داشته باشند، کدام است؟

- (۱) ۱۱۱۰ (۲) ۱۰۱۰ (۳) ۱۲۱۰ (۴) ۱۲۵۰

۳۱- مقدار x از معادله $x = 495 - x + 8 + \dots + 5 + 2$ کدام است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۵۶ (۳) ۵۰ (۴) ۵۳

۳۲- در یک دنباله حسابی ۱۰۰ جمله‌ای، مجموع ۵ جمله اول $\sqrt{7} - 3$ و مجموع ۵ جمله آخر $7 + \sqrt{7}$ می‌باشد، مجموع کل جملات کدام است؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۵۰

۳۳- در دو دنباله حسابی $\left\{ \begin{array}{l} 2, 7, 12, \dots \\ 8, 11, 14, \dots \end{array} \right.$ چند جمله مشترک سه‌رقمی داریم؟ (سراسری خارج از کنسور ریاضی - ۹۴)

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴) ۶۱

۳۴- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟

- (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۶۴

۳۵- در یک دنباله هندسی $a_4 a_6 = 2a_5$ ، آن‌گاه جمله اول کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{2}$

۳۶- اگر در یک دنباله هندسی ۱۵ جمله‌ای، مربع جمله ششم، سه برابر جمله چهارم باشد، حاصل ضرب همه جملات دنباله کدام است؟

- (۱) 3^{10} (۲) 3^{12} (۳) 3^{15} (۴) 3^{14}

۳۷- در یک دنباله هندسی صعودی، جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است، جمله اول کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۲۵ (۳) ۵ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۸- در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب ۹ جمله اول برابر ۸ است ($a_1 a_2 \dots a_9 = 8$)، آن‌گاه حاصل ضرب $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt[4]{2}$ (۳) $2\sqrt[8]{2}$ (۴) ۴

۳۹- بزرگ‌ترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{34}, d, c, \frac{1}{3}, b, a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۰- در دنباله هندسی $\dots, P, P^2, P^3, \dots$ جمله پنجم چقدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $16\sqrt{2}$ (۴) ۳۲

۴۱- اعداد $b, 9, 3\sqrt{3}$ و 3^a جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟ (آزاد ریاضی صبح - ۸۹)

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۹

۴۲- اعداد $2^a, 4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از دنباله هندسی‌اند. واسطه عددی بین a و b کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)

- (۱) $2/5$ (۲) ۲ (۳) $1/5$ (۴) $\sqrt{2}$

۴۳- به اعداد -۴ ، ۵ و ۴۱ عددی مانند X را اضافه می‌کنیم. اگر اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۴۴- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ ، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۴۸۲ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸

۴۵- بین دو عدد ۱ و ۶۴ ، پنج واسطه حسابی درج کرده‌ایم که جمله وسط آن‌ها A می‌باشد. بین همین دو عدد، پنج واسطه هندسی مثبت درج شده که جمله وسط آن‌ها B است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A + B = ۴۰ / ۵$ (۲) $A - B = ۲۴$ (۳) $A = B$ (۴) $A = \sqrt{B}$

۴۶- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۷- اگر جمله اول، دوم و ششم از یک دنباله حسابی با سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی برابر باشند، قدر نسبت این دنباله هندسی برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۸- اگر اعداد $X - ۲$ ، $X + ۱$ و $۲X + ۳$ تشکیل دنباله حسابی دهند، با اضافه کردن چه عددی به هریک از آن‌ها، یک دنباله هندسی به دست می‌آید؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) هر عدد حقیقی (۴) هیچ عدد حقیقی

۴۹- دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{y}, x, ۲$ غیرنزوجی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۶)

- (۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ (۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ (۳) $\frac{۱۱}{۸}$ (۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

۵۰- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, ۹, a, ۴$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۹)

- (۱) $۸۱ \frac{۳}{۸}$ (۲) $۸۱ \frac{۷}{۸}$ (۳) $۸۲ \frac{۳}{۸}$ (۴) $۸۳ \frac{۱}{۸}$

۵۱- در یک دنباله هندسی نزولی، بین جملات، رابطه $\frac{a_۱ \cdot a_۲ \cdot a_۳}{(a_۳)^۳} = ۶۴$ برقرار است. مجموع شش جمله اول، چند برابر جمله اول است؟

(آزاد ریاضی عصر - ۹۰)

- (۱) $\frac{۶۳}{۶۴}$ (۲) $\frac{۶۳}{۳۲}$ (۳) $\frac{۶۳}{۱۲۸}$ (۴) $\frac{۶۳}{۱۶}$

۵۲- بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸)

- (۱) $۳۰(۲ + \sqrt{۲})$ (۲) $۴۸\sqrt{۲}$ (۳) $۳۰(\sqrt{۲} + ۱)$ (۴) $۳۶(\sqrt{۲} + ۱)$

۵۳- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۸)

- (۱) $۱۰/۸$ (۲) $۱۱/۲$ (۳) $۱۲/۶$ (۴) $۱۳/۴$

۵۴- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

(سراسری ریاضی - ۸۹)

- (۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶



۵۵- در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{32}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۱)

(سراسری داخل کنسور-۹۳)

۵۶- حاصل $\frac{t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ کدام است؟

5 (۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

۵۷- حاصل $9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots9$ 20 یار کدام است؟

$\frac{10^{20} + 190}{9}$ (۴) $\frac{10^{21} + 190}{9}$ (۳) $\frac{10^{21} - 190}{9}$ (۲) $\frac{10^{20} - 190}{9}$ (۱)

۵۸- حاصل $A = 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \dots$ کدام است؟

$\frac{16}{7}$ (۴) $\frac{20}{7}$ (۳) $\frac{32}{7}$ (۲) $\frac{36}{7}$ (۱)

۵۹- در یک دنباله $a_n = \frac{3}{n+1}$ می‌باشد. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴) 3 (۳) 2 (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

(سراسری خارج از کنسور-۹۳)

۶۰- حاصل $\frac{t^8 - t^7 + \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام است؟

6 (۴) 5 (۳) 4 (۲) 3 (۱)

درس ۲ معادلات درجه دوم

در سال گذشته یاد گرفتید که هر معادله درجه دوم بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) است و جواب آن از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می آید و در ادامه روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

اگر x_1 و x_2 دو ریشه معادله درجه دوم و S مجموع دو ریشه و P ضرب دو ریشه باشد، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (۱)$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad (۲)$$

(۳) و همین‌طور می‌توان گفت x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (۴)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \quad (۵)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP \quad (۶)$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (۷)$$

البته در مورد مطالب بالا موارد ۱، ۲ و ۳ بیشتر اهمیت دارند و در حل مسائل استفاده می‌شوند و همین‌طور در معادله درجه دوم به نکات زیر هم توجه کنید

چند نکته

(۱) اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

(۲) اگر $a + b + c = 0$ باشد، یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

(۳) اگر $a + c = b$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

(۴) اگر $b = 0$ و $ac < 0$ باشند، معادله دو جواب قرینه دارد.

(۵) اگر $a = c$ باشد، دو ریشه عکس یکدیگرند و اگر $a = -c$ باشد، دو ریشه قرینه عکس یکدیگرند.

(۶) به‌طور کلی چون x_1, x_2 دو ریشه معادله هستند، پس $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (فرمول تجزیه سه جمله‌ای درجه دوم).

(۷) ریشه‌های دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ عکس یکدیگرند.

(۸) اگر در معادله درجه دوم $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد و داریم:

$$\Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 & \text{دو ریشه مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 & \text{دو ریشه منفی} \end{cases} \text{ دو ریشه هم‌علامت} \\ \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 & \text{قدرمتعلق ریشه مثبت بزرگ‌تر است} \\ -\frac{b}{a} < 0 & \text{قدرمتعلق ریشه منفی بزرگ‌تر است} \end{cases} \text{ دو ریشه غیر هم‌علامت} \end{cases}$$

(۹) اگر در معادله درجه دوم $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$\Delta = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف مثبت} = \frac{-b}{2a} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف منفی} = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

معادله یک ریشه مضاعف دارد

(۱۰) اگر در معادله درجه دوم $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.