بسم الله الرحمن الرحیم

مجموعه کتاب های تیزهوشان علـوی

ریاضی نهم

متوسطه اول

مؤلفان: حسام خلج طهرانی و نوید شریفی‌پور

سخن ناشر

به نام آن که جان را فکرت آموخت   چراغ دل به نور جان برافروخت

سپاس بیکران یگانه‌ی هستی‌بخش را که به انسان توانایی اندیشیدن عطا کرد، تا به یاری این دهش راه پیشرفت و ترقی را بپیماید و به امید اینکه عنایات الهی شامل حال ما باشد تا با بضاعت ناچیز علمی خود در خدمت دانش‌آموزان و آینده‌سازان کشور عزیزمان باشیم.
واحد انتشارات مؤسسه علمی آموزشی علوی برای ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان با استفاده از دانش و تجربه‌ی مؤلفان، مدرسان مدارس و آموزشگاه‌های خود به تدوین و چاپ کتاب‌های کمک آموزشی اقدام کرده است.
کتابی که در اختیار دارید، ویژگی‌های زیر را داراست:

- ✓ درسنامه‌ی روان همگام با سرفصل دروس کتاب درسی
- ✓ نکات کلیدی به همراه مثال‌های حل شده
- ✓ مجموعه‌ای از سؤالات چند گزینه‌ای طبقه‌بندی شده بر طبق سرفصل دروس
- ✓ سطح‌بندی سؤال‌ها همراه با نماد در ۴ درجه سطح آسان / متوسط / سخت / خیلی سخت
- ✓ سؤالات ویژه علاقه‌مندان شامل تست‌های ترکیبی
- ✓ سؤالات شناسنامه‌دار شامل آزمون‌های (کشوری، ورودی، سمپاد، المپیاد و ...).
- ✓ پاسخ‌نامه تشریحی و توضیح نکات مربوطه با توجه به درجه سختی سؤالات
- ✓ آزمون‌های استاندارد برای سنجش دانش‌آموزان در آخر کتاب

در این کتاب سعی بر این بوده تا با سود جستن از گفتار بسیار شیوا و متناسب با پایه‌ی تحصیلی و با در نظر گرفتن اهداف کتاب درسی، عمق یادگیری را افزایش دهیم.
رنگ‌بندی مناسب، رعایت الگوی استاندارد برای تعداد سطور، اندازه‌ی قلم، تعداد صفحات، قطع کتاب، طراحی و رنگ‌بندی منحصربه‌فرد بر اساس الگوی روانشناسی، از ویژگی‌های بارز این مجموعه کتاب‌ها است.
انتظار می‌رود تا قدم به قدم و به‌تدریج دانش‌آموزان ما مهارت‌های لازم را فرا گیرند و به کار برند.
از صاحب‌نظران گرامی خواهشمند است با ارائه پیشنهادهای خود، در جهت اصلاح نواقص احتمالی این کتاب، انتشارات این واحد را یاری فرمایند.
برای این امر می‌توانید با استفاده از نمایه‌ی زیر، با انتشارات علوی در ارتباط باشید.
امید است این اثر علمی مورد استفاده‌ی آموزگاران و دانش‌آموزان قرار گیرد.

۰۲۱-۲۲۸۹۲۵۵۰

www.alavi.ir

pub@alavi.ir

دریافت سفارشات ۰۲۱-۶۴۰۲۷۲۷۰

مقدمه

تقدیم به تمام فرزندان پاک ایران زمین
و
تقدیم به فرزند مهربانم ایلیا

خداوندا،
به یاد تو باشم دورها نزدیک‌ند و تمام ناممکن‌ها ممکن

خُب، از کجا شروع کنیم؟

کتاب ریاضی هستش پس معلومه باید در مورد ریاضی بنویسیم.

ریاضی در کل و به خصوص در اعداد، آن‌قدر شگفتی فراوان دارد که موجب حیرت و تعجب ما می‌شود «انگار سحر و جادویی در کار است»

باور نمی‌کنید؟ پس باید بیشتر با ریاضی آشنا شوید و بیشتر بخوانید.

بگذریم، شما عزیزان نهمی امسال، سال پر از هیجان و پر زحمتی پیش روی دارید. چرا؟

خُب، زمان تغییر رسیده، خداحافظی با یک دوره تحصیلی و ورود به یک دوره جدیدتر بنابراین امسال شما حتماً برنامه ویژه‌ای دارید.

برای ورود به هر مرحله از زندگی نیاز به آمادگی می‌باشد و هر چه این آمادگی بیشتر باشد موفقیت در آن مرحله بیشتر خواهد شد.

به طور مثال برای رسیدن به یک مدرسه خوب باید در آزمون ورودی آن شرکت کرد و با بقیه دوستان خود مسابقه داد و باید برای پیروزی در این مسابقه آمادگی ویژه‌ای داشته باشیم.

یکی از روش‌های آمادگی آشنایی با سوالات مشابه آن آزمون می‌باشد. تا اگر نکته یا سوالی را نفهمیدیم قبل از ورود به آزمون اصلی مشکل را حل کنیم (مثل بازی تدارکاتی)

در این کتاب سعی کردیم با توجه به نیازهای شما عزیزان این مشکل را حل کنیم و کتابی با ویژگی‌های زیر تولید کنیم:

- ✓ سوال‌های بخش‌بندی شده طبق سرفصل کتاب درسی
- ✓ نمونه سوال‌های آزمون‌های ورودی مدارس نمونه
- ✓ نمونه سوال‌های آزمون‌های بین المللی
- ✓ درسنامه قبل از هر فصل
- ✓ پاسخ کامل تشریحی برای هر سوال
- ✓ آزمون در پایان هر فصل
- ✓ نمونه آزمون‌های تیزهوشان و نمونه دولتی

امّا هیچ کاری بدون اشکال نیست، دوست دارم در پایان حل مسائل این کتاب نظرات و راهنمایی‌های خودتان را در اختیار من قرار دهید تا در مراحل بعدی از شما دوستان خوب و عزیز به نیکی قدردانی کنم.

هرگز تسلیم نشوید معجزه‌ها هر روز رخ می‌دهند شاید امروز روز شما باشد.

حسام خلج طهرانی

فهرست

فصل اول: مجموعه‌ها $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ۵

فصل دوم: اعداد گویا $x = \frac{a}{b}$, $b \neq ۰$ ۴۹

فصل سوم: اثبات و استدلال در هندسه $AC = AB \Longleftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$ ۹۱

فصل چهارم: توان $x^n \times y^n = (xy)^n$ ۱۴۹

فصل پنجم: عبارت‌های جبری $a^۲ + b^۲$ ۲۰۷

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ ۲۵۱

فصل هفتم: عبارت‌های گویا $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ۳۰۱

فصل هشتم: حجم و مساحت $V = S.h$ ۳۴۵

تقدیم به فرزندان ایران زمین

NcWcZcQcR

فصل اول

مجموعه‌ها

فصل اول
مجموعه‌ها

مجموعه

مجموعه یکی از مفاهیم اولیه و تعریف نشـده در ریاضی می‌باشـد. منظور از مجموعه کنار هم قرار دادن دسـته‌ای از اشـیاء، حروف، اشکال، اعداد و ... است که عضوهای آن مشخص باشند و بتوان آن‌ها را تشخیص داد.

یک مجموعه دارای سه ویژگی است:

۱) عضو تکراری در آن نباشد. (در صورت وجود عضو تکراری آن را حذف می‌کنیم.)

۲) اعضای آن داخل آکلاد { } قرار گیرند.

۳) نام داشته باشند (بهتر است از حروف بزرگ لاتین استفاده شود.)

نکته: ترتیب قرار گرفتن اعضا در مجموعه مهم نیست.

$$A = \{۱,۲,۳\} \ , \ B = \{۳,۱,۲\} \Rightarrow A = B$$

مجموعه‌ها از نظر تعداد اعضا دو نوع می‌باشند.

نکته: الف) مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی هستند که تعداد اعضای آن‌ها محدود است، مثل اعداد زوج طبیعی کوچک‌تر از ۱۰.

ب) مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی هستند که تعداد اعضای آن‌ها نامحدود است. مثل مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲۰.

مجموعه تهی

مجموعه‌ای است که هیچ عضوی نداشته و آن را به صورت { } و یا $\varnothing$ نمایش می‌دهند.

نکته: مجموعه‌های $\{۰\}$ و $\{\varnothing\}$، تهی نمی‌باشند مجموعه $\{۰\}$ و $\{\varnothing\}$ یک عضو دارند که به ترتیب ۰ , $\varnothing$ می‌باشند.

توجه: مجموعهٔ تهی، یک مجموعه متناهی است.

توجه: مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد حسابی و اعداد گویا، نمونه‌ای از مجموعه‌های اعداد نامتناهی هستند.

مثال: مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ مجموعه تهی است.

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح بین دو عدد ۲- و ۸ متناهی است.

مثال: مجموعهٔ مورچه‌های روی زمین متناهی است. چون تعدادشان قابل شمارش است.

مثال: مجموعهٔ انواع درختان جنگل‌های آمازون متناهی است.

عضویت و عدم عضویت

اگر عضوی مانند a متعلق به مجموعه‌ای مانند A باشـد. آن را به صورت $a \in A$ و اگر b متعلق به مجموعه‌ای مانند A نباشـد، آن را به صورت $b \notin A$ نمایش می‌دهند.

نمایش مجموعه

مجموعه‌ها را می‌توان به سه صورت ۱) تفصیلی (نمایش عددی)، ۲) هندسی (نمودار وِن) و ۳) توصیفی (نمایش ریاضی) نمایش دهیم.

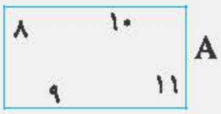
در نوع اول اعضای مجموعه را داخل آکلاد قرار داده و معرفی می‌کنیم. در نوع دوم که به نمودار وِن معروف است اعضاء را داخل یک شکل هندسی مانند دایره، مربع و ... قرار می‌دهند، در نوع سوم به جای نوشتن اعضاء، مجموعه را با علائم ریاضی نمایش می‌دهند.

مسئله (۱): مجموعه اعداد طبیعی بین ۷ تا ۱۲ را به صورت تفصیلی، هندسی و ریاضی نمایش دهید.

پاسخ: با توجه به توضیح داده شده در هر قسمت خواهیم داشت:

نمایش تفصیلی $\Rightarrow$ $A=\{۸\,,\,۹\,,\,۱۰\,,\,۱۱\}$

نمایش هندسی $\Rightarrow$



نمایش توصیفی $\Rightarrow$ $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\,,\,۷<x<۱۲\}$

مسئله (۲): هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمایش اعضایشان مشخص کنید.

الف) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\,,\,x<۴\}$

ب) $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\,,\,-۲\leq x<۵\}$

پ) $C=\{\frac{x^{۲}}{۳}\,|\,x\in W\,,\,x<۴\}$

پاسخ:

$A=\{۱\,,\,۲\,,\,۳\}$

$B=\{-۲\,,\,-۱\,,\,۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,۴\}$

$$C=\{\frac{x^{۲}}{۳}\,|\,\underbrace{x\in W\,,\,x<۴}_{x=\{۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\}}\}=\{\frac{۰^{۲}}{۳}\,,\,\frac{۱^{۲}}{۳}\,,\,\frac{۲^{۲}}{۳}\,,\,\frac{۳^{۲}}{۳}\}=\{۰\,,\,\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{۴}{۳}\,,\,\frac{۹}{۳}\}=\{۰,\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۳},۳\}$$

مثال: مجموعهٔ $\{\frac{۴}{۵},\frac{۸}{۷},\frac{۱۲}{۹},\ldots\}$ را به صورت نمایش توصیفی بنویسید.

پاسخ:

$$\{\frac{۴}{۵},\frac{۸}{۷},\frac{۱۲}{۹},\ldots\}=\{\frac{۴x}{۲x+۳}\,|\,x\in\mathbb{Z},\,x\geq۱\}$$

مثال: مجموعهٔ $\{۹,۹۹,۹۹۹,\ldots\}$ به زبان ریاضی کدام است؟

۱) $A=\{۱۰^{n}-۱\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ۲) $B=\{\frac{۱۰^{n}-۱}{۲}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ۳) $C=\{۱۰^{۲n}-۱\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $D=\{۱۰^{n}+۱\,|\,n\in\mathbb{N}\}$

پاسخ: گزینه «۱»

$۹=۱۰^{۱}-۱$

$۹۹=۱۰^{۲}-۱$

$۹۹۹=۱۰^{۳}-۱$

$\vdots$

$۹۹۹۹\ldots۹=۱۰^{n}-۱$

تست ۱: کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمایش تفصیلی مجموعه مقابل است؟ $A=\{x\in \mathbb{N} \mid \frac{۱۲}{x}\in \mathbb{N}\}$

۱) $A=\{۱۲ , ۲۴ , ۳۶ , \cdots\}$
۲) $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲\}$
۳) $A=\{۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , ۱۲\}$
۴) $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , \cdots , ۱۲\}$

پاسخ: گزینه «۲» - مجموعه A معرف مجموعه‌ای است که اگر عدد ۱۲ بر آن تقسیم شود و حاصل عددی طبیعی باشد. یعنی اعضای مجموعه A همان شمارنده‌های عدد ۱۲ می‌باشند. $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲\}$

تناظر یک به یک اعضا

دو مجموعهٔ A و B در تناظر یک به یک با یکدیگر هستند به شرطی که به ازای هر عضو از مجموعهٔ A، یک و فقط یک عضو از مجموعهٔ B و به ازای هر عضو از مجموعهٔ B یک و فقط یک عضو از مجموعهٔ A وجود داشته باشد. دو مجموعه که این خصوصیات را داشته باشند «هم‌ارز» می‌نامیم.

- مجموعه اعداد طبیعی و اعداد حسابی هم‌ارزند، زیرا:

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , \ldots\} \\ \quad \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \\ W=\{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , \ldots\} \end{array}$$

دو مجموعهٔ برابر

دو مجموعه هم‌ارز A و B را برابر می‌گوییم، هرگاه تک تک عضوهای مجموعه A با اعضای مجموعه B برابر باشد.

تست ۲: اگر $A=\{۲ , ۳ , a-۲\}$ و $B=\{۳ , ۵ , b+۱\}$ باهم برابر باشند، حاصل $a+b$ برابر است با:

۱) ۷
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» - از آنجایی که دو مجموعه برابر هستند، بنابراین:

$$\{۲ , ۳ , a-۲\}=\{b+۱ , ۳ , ۵\} \Rightarrow \begin{cases} b+۱=۲ \Rightarrow b=۱ \\ a-۲=۵ \Rightarrow a=۷ \end{cases} \Rightarrow a+b=۱+۷=۸$$

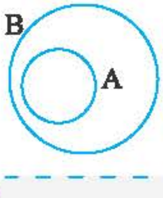
تست ۳: اگر $\{a+۱ , ۲ , b\}=\{۲\}$ باشد، مقادیر a و b به ترتیب کدام است؟

۱) ۲ و ۱
۲) ۱ و ۲
۳) ۲ و ۳
۴) ۳ و ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$a+۱=۲ \Rightarrow a=۲-۱=۱ \Rightarrow a=۱ \;,\; b=۲$$

زیر مجموعه (جزئیت)



مجموعهٔ A را زیر مجموعهٔ B گویند هرگاه تمامی اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B قرار داشته باشند و آن را به صورت $A\subseteq B$ نمایش می‌دهند و اگر C زیرمجموعه B نباشد آن را به صورت $C\not\subset B$ نمایش می‌دهند. از دیدگاه هندسی (نمودار وِن) $A\subseteq B$ را به‌صورت مقابل نشان می‌دهیم.

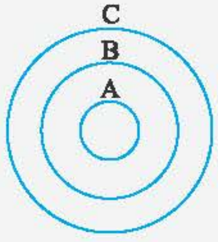
نکته:

۱) مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است. $(\varnothing\subseteq A)$

۲) هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش می‌باشد. $(A\subseteq A)$

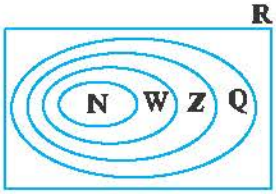
۳) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، آن‌گاه $A=B$

۴) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$، آن‌گاه $A\subseteq C$ (شکل روبه‌رو)



توجه: مجموعه‌ی اعداد طبیعی، زیر مجموعهٔ مجموعه‌ی اعداد حسابی و ... است.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$



- به تعداد اعضای یک مجموعه عدد اصلی آن مجموعه گفته می‌شود و آن را با حرف n نمایش می‌دهند. به طور مثال:

$A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow n(A) = ۴$

توجه: عدد اصلی در مجموعه‌های متناهی و قابل شمارش بیان می‌شود.

تست ۴: با توجه به $\{۲, ۴\} \subseteq A \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به جای A چند مجموعه می‌توان نوشت؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۴» -

راه‌حل اول: از آنجایی که $\{۲, ۴\}$ زیرمجموعهٔ A اسـت. پس مجموعه A باید ۲ و ۴ را داشـته باشد امّا A خود زیرمجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است و داشتن عضوهای ۳ و ۱ برای آن الزامی نیست.

بنابراین A می‌تواند $\{۴, ۳, ۲, ۱\}, \{۱, ۲, ۴\}, \{۳, ۲, ۴\}, \{۱, ۲, ۴\}, A = \{۲, ۴\}$ باشد. یعنی ۴ حالت برای A می‌توان در نظر گرفت.

راه‌حل دوم:

$\overset{\text{تعداد اعضای اختیاری}}{۲^{۲}} = ۴$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی:

برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی از رابطه ۲^n استفاده می‌شود، که n همان تعداد اعضای آن مجموعه می‌باشد.

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{۳, ۵, ۷, ۸\}$ برابر است با: $۲^۴ = ۱۶$

نکته:

۱ تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی یک مجموعه برابر n می‌باشد. $\binom{n}{۱}$

۲ تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌باشند. $\binom{n}{۲}$

۳ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه برابر $\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$ می‌باشد. $\binom{n}{۳}$

۴ به‌طور کلی تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی هر مجموعه n عضوی، مساوی $\frac{n!}{k! \times (n-k)!}$ است. $\binom{n}{k}$

تست ۵: در یک مجموعه ۱۰ عضوی، تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی، چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های هفت عضوی آن است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» -

$$\binom{۱۰}{۳} = \binom{۱۰}{۷}$$

$$\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)! \times ۳!} = \frac{۱۰!}{۷! \times ۳!} = \frac{\cancel{۷!} \times \overset{۴}{\cancel{۸}} \times \overset{۳}{\cancel{۹}} \times ۱۰}{\cancel{۷!} \times \underset{۱}{\cancel{۶}}} = ۱۲۰$$

$$\frac{۱۰!}{(۱۰-۷)! \times ۷!} = \frac{۱۰!}{۳! \times ۷!} = ۱۲۰$$

در نتیجه تعداد اعضای خواسته شده با هم برابرند.

زیر مجموعه محض

زیرمجموعهٔ محض مجموعهٔ A ، مجموعه‌ای است که شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A به غیر از خود مجموعه.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه برابر است با: $\mathbf{2^n - 1}$.

مثال: یک مجموعهٔ n عضوی ۷ زیر مجموعهٔ محض دارد. n چند است؟

$$2^n - 1 = 7 \Rightarrow 2^n = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

تست ۶: اگر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 16^{3n-11} باشد تعداد اعضای این مجموعه چند تاست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳» -

$$2^n = 16^{3n-11} \Rightarrow 2^n = (2^4)^{3n-11} = 2^{12n-44} \Rightarrow n = 12n - 44 \Rightarrow 11n = 44 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

تست ۷: در یک مجموعهٔ ۵ عضوی تعداد زیر مجموعه‌هایی که بیش از دو عضو داشته باشند برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۴»

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} =$$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + 1 = \frac{4\times5}{2} + \frac{5}{1} + 1 = 10 + 5 + 1 = \boxed{16}$$

تست ۸: مجموعه‌ای دارای ۱۰ زیرمجموعه دو عضوی است این مجموعه چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» - با توجه به نکته شماره (۲) در صفحهٔ قبل خواهیم داشت: $\frac{n(n-1)}{2} = 10 \Rightarrow n(n-1) = 20$ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی برابر ۲۰ می‌باشد پس: $n=5$ است.

مجموعهٔ توانی مجموعه

مجموعهٔ توانی مجموعه A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و که شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A است.

توجه: هر یک از زیر مجموعه‌های مجموعه A ، عضوی از مجموعه‌ی $P(A)$ است.

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ باشد، $P(A)$ به صورت زیر است:

پاسخ:

$$P(A) = \{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

نکته: $\mathbf{n(A) = k \Rightarrow n(P(A)) = 2^k}$

تست ۹: اگر $T = \{7,8,9,10,11,12\}$ مقدار $n(P(T))$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

پاسخ: گزینه «۱» -

$n(T) = 6 \Rightarrow$ تعداد زیر مجموعه‌های T $= 2^n = 2^6 = 64$

$$n(P(T)) = 2^6 = 64$$

تست ۱۰: اگر $n(T)=4$ و $n(P(P(T)))$ کدام است؟

۱) 2^{16} ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۲۸ ۴) 2^{6}

پاسخ: گزینه «۱»

$n(T)=4 \Rightarrow n(P(T))=2^4=16 \Rightarrow n(P(P(T)))=2^{16}$

مجموعهٔ مرجع

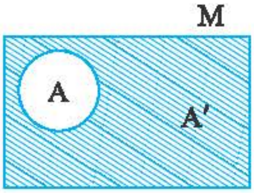
تمام مجموعه‌هایی که در هر سؤال مورد نظر می‌باشد به طور کلی زیر مجموعهٔ مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ مرجع می‌باشند که معمولاً آن را با M یا U نمایش می‌دهند.

متمم یک مجموعه

متمم مجموعه A مجموعه‌ای است که:

۱) شامل هیچ یک از اعضای مجموعه A نباشد.

۲) تمام اعضای آن در مجموعهٔ مرجع قرار داشته باشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.



توجه: نمایش توصیفی مجموعه متمم A (A') $\quad A'=\{x|x\notin A\ ,\ x\in M\}$

نکته:

۱) اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$.

۲) $(B')'=B$

۳) $A=B \Rightarrow A'=B'$

۴) $M'=\varnothing$

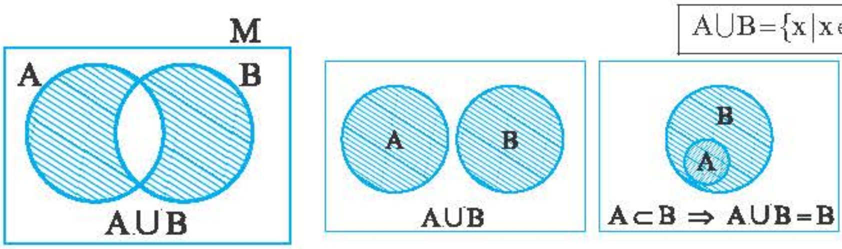
۵) $\varnothing'=M$

اعمال روی مجموعه‌ها:

۱) اجتماع:

اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو A یا عضو B یا هر دو می‌باشند و آن را با نماد $A\cup B$ نمایش می‌دهند.

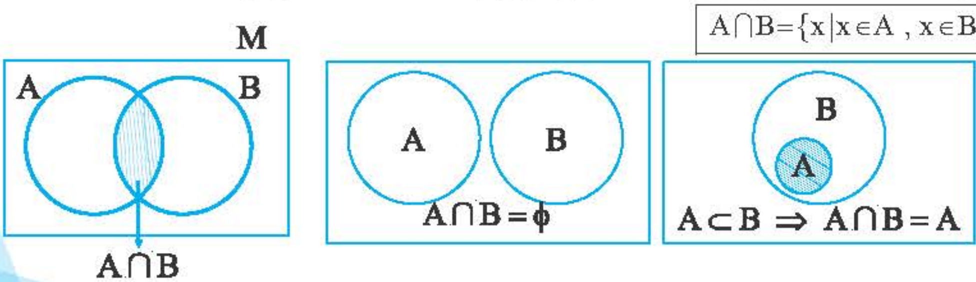
نمایش توصیفی $A\cup B$: $\boxed{A\cup B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B\}}$



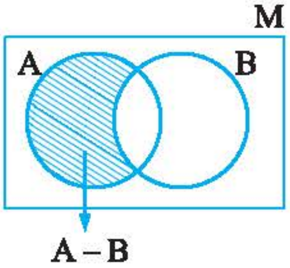
۲) اشتراک:

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن هم در A باشند هم در B و آن را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهند.

نمایش توصیفی: $A\cap B$: $\boxed{A\cap B=\{x|x\in A\ ,\ x\in B\}}$



۳) تفاضل:



تفاضل دو مجموعه‌ی A و B که آن را به صورت $A-B$ نمایش می‌دهند، مجموعه‌ای است که شامل تمام اعضایی از مجموعه‌ی A است که در مجموعه‌ی B موجود نباشد. یعنی:

$$A-B=\{x|x\in A\ ,\ x\notin B\}$$

نکته: اجتماع و اشتراک مجموعه های $A_۱\ ,A_۲\ ,A_۳\ ,\ldots$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=۱}^{n}A_i\quad ;\quad A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=۱}^{n}A_i$$

مثال: اگر $A_i=\{x|x\in W\ ,\ x<i\}$ حاصل مجموعهٔ $\bigcup_{i=۳}^{۵}A_i$ و $\bigcap_{i=۸}^{۱۸}A_i$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\bigcup_{i=۳}^{۵}A_i=A_۳\cup A_۴\cup A_۵=\{۰,۱,۲\}\cup\{۰,۱,۲,۳\}\cup\{۰,۱,۲,۳,۴\}=\{۰,۱,۲,۳,۴\}=A_۵$$

$$\bigcap_{i=۸}^{۱۸}A_i=A_۸\cap A_۹\cap A_{۱۰}\cap A_{۱۱}\cdots\cap A_{۱۸}=\{۰,۱,۲,\ldots,۷\}\cap\{۰,۱,۲,\ldots,۸\}\cap\{۰,۱,۲,\ldots,۹\}\ldots\cap\{۰,۱,۲,\ldots,۱۷\}$$
$$=\{۰,۱,۲,\ldots,۷\}=A_۸$$

خواص اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل

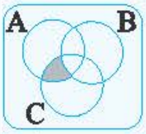
تفاضل		اشتراک		اجتماع	
$A-A'=A$	$A-A=\phi$	$A\cap A'=\phi$	$A\cap A=A$	$A\cup A'=M$	$A\cup A=A$
$A-M=\phi$	$A-\phi=A$	$A\cap M=A$	$A\cap\phi=\phi$	$A\cup M=M$	$A\cup\phi=A$
$A-B\subseteq A$	$M-A=A'$	$A\cap B\subseteq B$	$A\cap B\subseteq A$	$B\subseteq A\cup B$	$A\subseteq A\cup B$
$A-B=B'-A'$		$A\cap B=B\cap A$		$A\cup B=B\cup A$	
$A-B=A\cap B'$		قانون دمورگان $(A\cap B)'=A'\cup B'$		قانون دمورگان: $(A\cup B)'=A'\cap B'$	
		$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$		$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	
		قانون جذب $A\cap(A\cup B)=A$		قانون جذب $A\cup(A\cap B)=A$	
		$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$		$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	

تست ۱۱: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ چند مجموعه مانند X در رابطه $(A\cap B)\subseteq X\subseteq(A\cup B)$ صدق می‌کند.

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳» - ابتدا $A\cap B$ و $A\cup B$ را با اعضایشان به دست می‌آوریم $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $A\cap B=\{۲,۳,۴\}$. حال مجموعهٔ X باید $\{۲,۳,۴\}$ را حتماً داشته و ولی $\{۱,۵\}$ را به طور اختیاری می‌تواند داشته باشد. پس تعداد مجموعه‌های که به جای X می‌توان نوشت برابر $۴=۲^۲$ است.

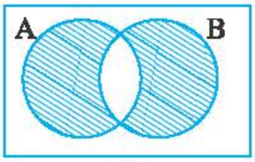
تست ۱۲: قسمت هاشورخورده در شکل مقابل کدام است؟



۱) $A-(B\cap C)$
۲) $A\cap(C-B)$
۳) $A\cap(B-C)$
۴) $(A\cap C)\cup B$

پاسخ: گزینه «۲» قسمت هاشورخورده می‌تواند $(A\cap C)-B$ یا $A\cap(C-B)$ باشد.

تفاضل متقارن:



$A\Delta B$

مجموعه‌ای شـامل تمام عضوهای مجموعهٔ A و B (به جز اشـتراک دو مجموعه) را مجموعهٔ تفاضل متقارن دو مجموعه می‌نامند که آن را با نماد $A\Delta B$ نمایش می‌دهند. می‌نویسیم:

$$A\Delta B=\{x|x\in(A-B) \text{ یا } x\in(B-A)\}$$

نکته: نمایش‌های مختلف $A\Delta B$ به صورت زیر بیان می‌شود:

۱) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

۲) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

۳) $A\Delta B=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

۴) $A\Delta B=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

۵) $A\Delta B=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

نکته: عبارات زیر همواره برای تفاضل متقارن برقرار است:

۱) $A\Delta B=B\Delta A$

۲) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

۳) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

۴) $A\Delta\phi=\phi\Delta A=A$

۵) $A\Delta A=\phi$

۶) $A\Delta M=A'$

۷) $A\Delta B=A'\Delta B'$

۸) $A\Delta A'=M$

تست ۱۳: کدام یک از گزینه‌های زیر نمایش مناسبی برای $A\Delta B$ نمی‌باشد؟

۱) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
۲) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
۳) $A\Delta B=(A\cap B)\cup(B\cap A')$
۴) $A\Delta B=(A\cup B)\cup(A'\cup B')$

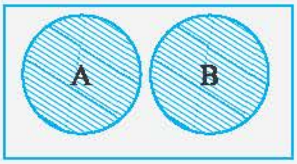
پاسخ: گزینه «۴» - زیرا:

$$A\Delta B=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$

نکته: برای حل مسائل مربوط به مجموعه‌ها می‌توان از نکات زیر استفاده کرد:

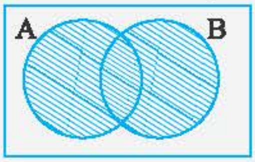
۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

دو مجموعه A و B مجزا هستند.

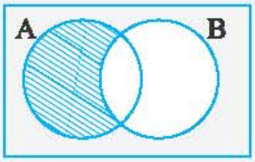


۲) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

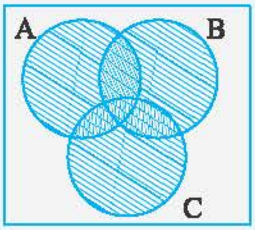
دو مجموعه A و B مشترک هستند.



۳) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



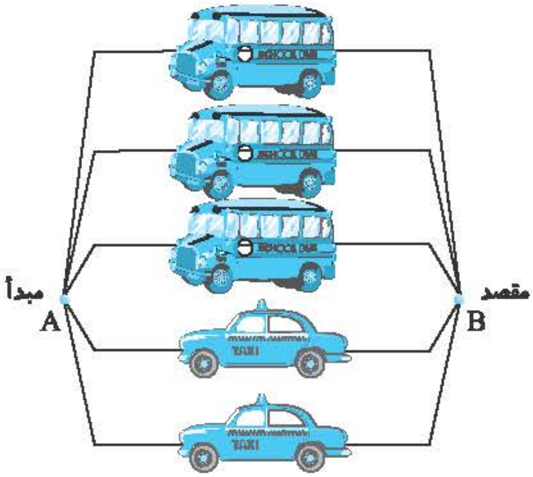
۴) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$



معرفی دو اصل مهم ضرب و جمع:

دو اصل ضرب و جمع را با دو مثال ساده در زیر بیان می‌کنیم:

۱- اصل جمع:



۵ مسیر = ۲ مسیر تاکسی رو ⊕ ۳ مسیر اتوبوس رو

توجه: در اصل جمع همزمانی در انتخاب راه‌های ممکن وجود ندارد.